Esercitazioni PL

Esercizio I (risoluzione grafica e simplesso)

Sia dato il seguente problema di PL

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Lo si risolva prima per via grafica e dopo attraverso l'algoritmo del simplesso, riconoscendo graficamente le azioni compiute dal simplesso a ogni iterazione.

Esercizio II (risoluzione grafica e simplesso)

Sia dato il seguente problema di PL

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Lo si risolva prima per via grafica e dopo attraverso l'algoritmo del simplesso, riconoscendo graficamente le azioni compiute dal simplesso a ogni iterazione.

Esercizio III (metodo due fasi)

Sia dato il problema di PL

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 + 1/2x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 + x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Lo si risolva con il metodo due fasi.

Esercizio IV (metodo due fasi)

Sia dato il problema di PL

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 = 3 \\ & x_1 + x_3 = 1 \\ & x_2 + x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Lo si risolva con il metodo due fasi.

Esercizio V (metodo due fasi)

Sia dato un problema di II fase con obiettivo x_1+x_2. Si supponga che all'arresto della risoluzione del problema di I fase si abbia la seguente riformulazione rispetto alla base ottima $\{x_1, x_2, s_3\}$.

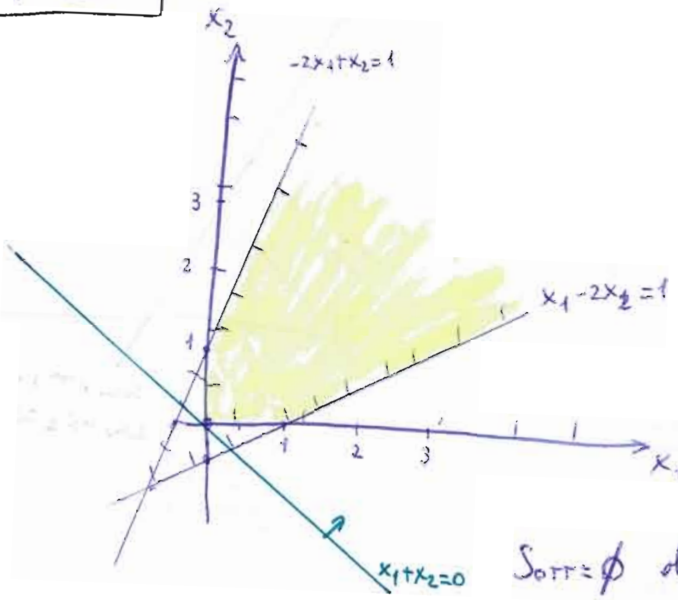
$$\begin{aligned} \max \quad & -2s_1 - 3s_2 - x_5 \\ & x_1 = 3 - s_1 - 2x_4 - x_5 \\ & x_2 = 4 - 2s_1 - 3s_2 + x_3 - x_4 - x_5 \\ & s_3 = s_1 + 2s_2 - x_5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Si dica come procedere per risolvere il problema di II fase.

ESERCITAZIONE PL

I

$$\max\ x_1 + x_2$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 1$$
$$-2x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



$S_{OTT} = \emptyset$ direttivo illimitato

Forma standard:

$$\max\ x_1 + x_2$$
$$x_1 - 2x_2 + y_1 = 1$$
$$-2x_1 + x_2 + y_2 = 1$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$$

$B_0 = \{y_1, y_2\}$:

$$\max\ x_1 + x_2$$
$$y_1 = 1 - x_1 + 2x_2$$
$$y_2 = 1 + 2x_1 - x_2$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$$

- no ottimalità: nell'direttivo ho coefficienti positivi
- no illimitatezza: non ho variabili con coefficienti tutti ≥ 0 (o ≤ 0)
- soluzione di base: $\underbrace{x_1 = 0 \quad x_2 = 0}_{\text{origine}}$ $\quad y_1 = 1 \quad y_2 = 1$ $\quad$ ob. $= 0$.

Entra in base x_1 (coefficiente >0 nell'direttivo).
Esce di base y_1 (all'aumentare di x_1 arriva ad annullarsi)

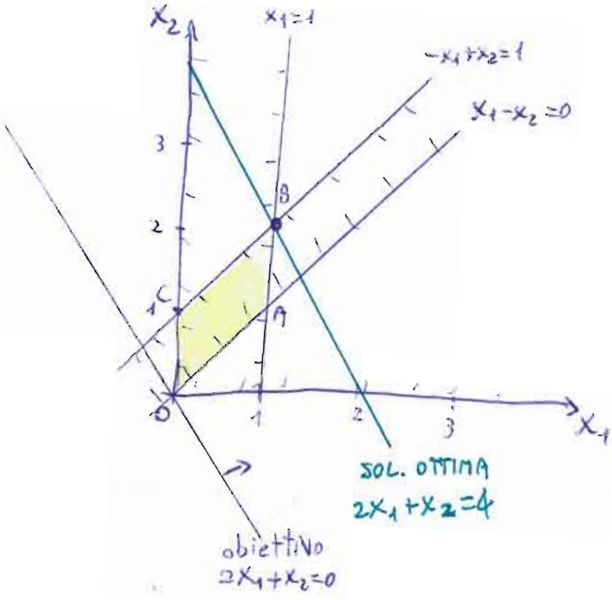
$B_1 = \{x_1, y_2\}$

$$\max\ 1 + 3x_2 - y_1$$
$$x_1 = 1 + 2x_2 - y_1$$
$$y_2 = 3 + 3x_2 - 2y_1$$

- no ottimalità
- ~~sì~~ illimitatezza!! $\Rightarrow S_{OTT} = \emptyset$
- soluzione di base $\underbrace{x_1 = 1 \quad x_2 = 0}_{\text{PUNTO } (1,0)}$ $\quad y_1 = 0 \quad y_2 = 3$ $\quad$ ob. $= 1$

II) $\max\ 2x_1 + x_2$

$$x_1 - x_2 \le 0$$
$$-x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



$S_{OTT} = \{B\}$ $\quad B(1,2)$

obiettivo $= 2+2=4$
ottimo

Forma standard:

$\max\ 2x_1 + x_2$

$$x_1 - x_2 + y_1 = 0$$
$$-x_1 + x_2 + y_2 = 1$$
$$x_1 + y_3 = 1$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

$B_0 = \{y_1, y_2, y_3\}$ $\quad \max\ 2x_1 + x_2$

$$y_1 = -x_1 + x_2$$
$$y_2 = 1 + x_1 - x_2$$
$$y_3 = 1 - x_1$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

- no ottimalità (obiettivo con coefficienti di costo ridotto positivi)
- no illimitatezza
- soluzione di base: $\underbrace{x_1 = 0 \quad x_2 = 0}_{\text{origine}}$ $\quad y_1 = 0 \quad y_2 = 1 \quad y_3 = 1$ $\quad$ obiettivo $= 0$

Entra in base x_1 (coefficiente più alto pari a 2).
Esce di base y_1 (con $x_1 = 0$ annulla y_1).

$B_1 = \{x_1, y_2, y_3\}$ $\quad \max\ 3x_2 - 2y_1$

$$x_1 = x_2 - y_1$$
$$y_2 = 1 - y_1$$
$$y_3 = 1 - x_2 + y_1$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

- no ottimalità
- no illimitatezza
- soluzione di base $\underbrace{x_1 = 0 \quad x_2 = 0}_{\text{origine}}$ $\quad y_1 = 0 \quad y_2 = 1 \quad y_3 = 1$ $\quad$ obiettivo $= 0$

Entra in base x_2, esce di base y_3.

$B_2 = \{x_1, y_2, x_2\}$ $\quad \max\ 3 + y_1 - 3y_3$

$$x_1 = 1 - y_3$$
$$y_2 = 1 - y_1$$
$$x_2 = 1 + y_1 - y_3$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

- no ottimalità
- no illimitatezza
- soluzione di base $\underbrace{x_1 = 1 \quad x_2 = 1}_{\text{punto A}}$ $\quad y_1 = 0 \quad y_2 = 1 \quad y_3 = 0$ $\quad$ obiettivo $= 3$

Entra in base y_1 ed esce y_2 (unica equazione con coefficiente di y_1 negativo).

$B_3 = \{x_1, y_1, x_2\}$

$$\max\ 4 - y_2 - 3y_3$$
$$x_1 = 1 - y_3$$
$$y_1 = 1 - y_2$$
$$x_2 = 2 - y_2 - y_3$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

- sì ottimalità!! La soluzione di base è soluzione ottima
- soluzione di base: $x_1 = 1$, $\underbrace{x_2 = 2}_{\text{punto } B}$, $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ obiettivo $= 4$

III

$$\max\ 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + x_3 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Questo è il problema di II fase. Costruisco il problema di I fase:

$$\max\ -s_1 - s_2 - s_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 3$$
$$x_1 - x_2 + x_3 + s_2 = 1$$
$$x_1 + x_3 + s_3 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

$B_0 = \{s_1, s_2, s_3\}$

$$\max\ -6 + 3x_1 + 3x_3$$
$$s_1 = 3 - x_1 - x_2 - x_3$$
$$s_2 = 1 - x_1 + x_2 - x_3$$
$$s_3 = 2 - x_1 - x_3$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- no ottimalità
- no illimitatezza
- soluzione di base: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $s_1 = 3$, $s_2 = 1$, $s_3 = 2$ ob. $= -6$

Entra in base x_1 ed esce s_2

$B_1 = \{s_1, x_1, s_3\}$

$$\max\ -3 + 3x_2 - 3s_2$$
$$s_1 = 2 - 2x_2 + s_2$$
$$x_1 = 1 + x_2 - s_2 - x_3$$
$$s_3 = 1 - x_2 + s_2$$

- no ottimalità
- no illimitatezza
- soluzione di base: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $s_1 = 2$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$ ob. $= -3$

Entra in base x_2 ed esce s_1

$B_2 = \{x_2, x_1, \cancel{s_3}\}$

$$\max\ -\frac{3}{2}s_1 - \frac{3}{2}s_2$$
$$x_2 = 1 - \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2$$
$$x_1 = 2 - \frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_2 - x_3$$
$$\cancel{s_3 = \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2}$$

- sì ottimalità! obiettivo $= 0$
- soluzione di base: $x_2 = 1$, $x_1 = 2$, $x_3 = 0$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $\cancel{s_3 = 0}$

Vorrei far entrare anche x_3 in base al posto di s_3, ma non riesco poiché nella equazione di s_3, x_3 ha coefficiente nullo. Elimino quel vincolo perché ridondante.

Riformulo il problema di II fase rispetto alla base B_2, eliminando anche qui il terzo vincolo perché ridondante:

$$\begin{array}{l} \max\ 2x_1+x_2+\frac{1}{2}x_3 \\ x_1 = 3-x_2-x_3 \\ x_2 = -1+x_1+x_3 \\ x_1,x_2,x_3 \geq 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \max\ 2x_1+x_2+\frac{1}{2}x_3 \\ 2x_1 = 4-2x_3 \\ x_2 = -1+x_3+x_1 \\ x_1,x_2,x_3 \geq 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \max\ 5+\frac{3}{2}x_3 \\ x_1 = 2-x_3 \\ x_2 = 1 \\ x_1,x_2,x_3 \geq 0 \end{array} \quad ob. = 5$$

(IV)

$$\begin{array}{l} \max\ x_1+x_2 \\ x_1+x_2=3 \\ x_1+x_3=1 \\ x_2+x_4=1 \\ x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0 \end{array}$$

Costruisco il problema di I fase:

$$\begin{array}{l} \max\ -S_1 \\ x_1+x_2+S_1=3 \\ x_1+x_3=1 \\ x_2+x_4=1 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,S_1 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \max\ -3+x_1+x_2 \\ S_1 = 3-x_1-x_2 \\ x_3 = 1-x_1 \\ x_4 = 1-x_2 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,S_1 \geq 0 \end{array} \quad B_0=\{S_1,x_3,x_4\}$$

$$B_1=\{S_1,x_1,x_4\} \quad \begin{array}{l} \max\ -2+x_2-x_3 \\ S_1 = 2+x_3-x_2 \\ x_1 = 1-x_3 \\ x_4 = 1-x_2 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,S_1 \geq 0 \end{array} \qquad B_2=\{S_1,x_1,x_2\} \quad \begin{array}{l} \max\ -1-x_3-x_4 \\ S_1 = 1+x_3+x_4 \\ x_1 = 1-x_3 \\ x_2 = 1-x_4 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,S_1 \geq 0 \end{array}$$

È verificata la condizione di ottimalità. La soluzione di base è $\varphi^* = -1 < 0$ $\Rightarrow S_a = \emptyset$

(V) Faccio entrare in base x_5 e uscire S_3

$$B_0=\{x_1,x_2,S_3\} \quad \begin{array}{l} \max\ -2S_1-3S_2-x_5 \\ x_1 = 3-S_1-2x_4-x_5 \\ x_2 = 4-2S_1-3S_2+x_3-x_4-x_5 \\ S_3 = S_1+2S_2-x_5 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,S_1,S_2,S_3 \geq 0 \end{array}$$

$$B_1=\{x_1,x_2,x_5\} \quad \begin{array}{l} \max\ -3S_1-5S_2+S_3 \\ x_1 = 3-2S_1-2S_2+S_3-2x_4 \\ x_2 = 4-3S_1-5S_2+S_3+x_3-x_4 \\ x_5 = S_1+2S_2-S_3 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,S_1,S_2,S_3 \geq 0 \end{array}$$

$\varphi^* = 0 \Rightarrow S_a \neq \emptyset$

Riformulo il problema di II fase rispetto alla base ammissibile B_1 e lo risolvo con l'algoritmo del simplesso

Esercitazioni dualità

Esercizio I

Sia dato il problema di PL

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + x_2 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1 + 2x_2 \geq 2 \\
& 2x_1 + x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Lo si risolva per via grafica. Lo si trasformi quindi in forma standard e si scriva il duale del problema in forma standard. Infine, si risolva il duale utilizzando le condizioni di complementarità.

Esercizio II

Sia dato il seguente problema di PL

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -3x_1 - 2x_2 \\
& x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\
& -2x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Se ne scriva il duale. Si risolva il duale per via grafica e si determini quindi la soluzione ottima del primale utilizzando le condizioni di complementarità.

Dimenticando i risultati già ottenuti, si risolva il primale applicando il simplesso duale. A ogni iterazione del simplesso duale si visualizzi graficamente il punto della regione ammissibile del duale in cui ci si trova.

Esercizio III

Sia dato il seguente problema di PL

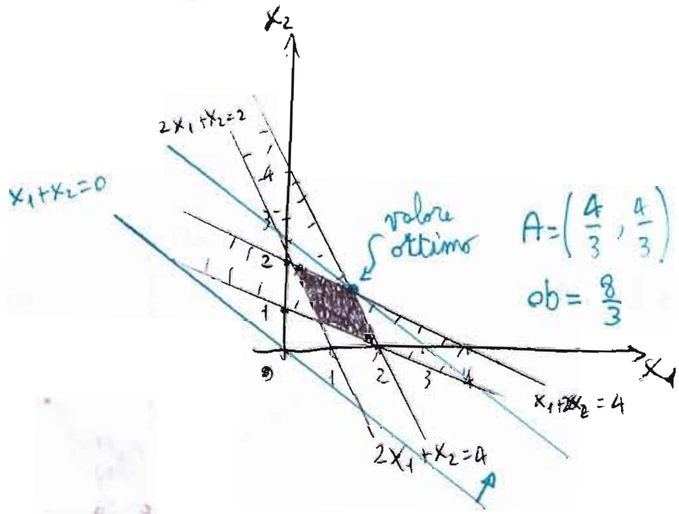
$$
\begin{aligned}
\min \quad & 3x_1 + x_2 \\
& x_1 + x_2 \geq 2 \\
& -x_1 + x_2 \geq 0 \\
& 2x_2 \geq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Lo si risolva prima per via grafica e poi, dopo averlo trasformato in forma standard, attraverso l'algoritmo del simplesso duale. A ogni iterazione si visualizzi graficamente il punto (*al di fuori della regione ammissibile del problema originario*) in cui ci si trova. Infine, si scriva il duale del problema in forma standard e se ne ricavi una soluzione ottima con le condizioni di complementarità.

Esercitazione Dualità

I

$$\max\ x_1+x_2$$
$$x_1+2x_2\le 4$$
$$2x_1+x_2\le 4$$
$$x_1+2x_2\ge 2$$
$$2x_1+x_2\ge 2$$
$$x_1,x_2\ge 0$$



Forma standard

$$\max\ x_1+x_2$$
$$x_1+2x_2+y_1=4 \Leftrightarrow u_1$$
$$2x_1+x_2+y_2=4 \Leftrightarrow u_2$$
$$x_1+2x_2-y_3=2 \Leftrightarrow u_3$$
$$2x_1+x_2-y_4=2 \Leftrightarrow u_4$$
$$x_1,x_2,y_1,y_2,y_3,y_4\ge 0$$

Il duale è

$$\min\ 4u_1+4u_2+2u_3+2u_4$$
$$u_1+2u_2+u_3+2u_4\ge 1 \Leftrightarrow x_1$$
$$2u_1+u_2+2u_3+u_4\ge 1 \Leftrightarrow x_2$$
$$u_1\ge 0 \Leftrightarrow y_1$$
$$u_2\ge 0 \Leftrightarrow y_2$$
$$-u_3\ge 0 \Leftrightarrow y_3$$
$$-u_4\ge 0 \Leftrightarrow y_4$$

Condizioni di complementarietà:

$$(u^*A-c)x^*=0$$

$$\begin{cases}(u_1^*+2u_2^*+u_3^*+2u_4^*-1)\,x_1^*=0\\(2u_1^*+u_2^*+2u_3^*+u_4^*-1)\,x_2^*=0\\u_1^*y_1^*=0\\u_2^*y_2^*=0\\-u_3^*y_3^*=0\\-u_4^*y_4^*=0\end{cases}$$

Abbiamo trovato $x_1^*=\frac{4}{3}$, $x_2^*=\frac{4}{3}$. Ricavo dalla forma standard del primale i valori di y_i^*, $i=1,\dots,4$:

$$y_1^*=4-\frac{4}{3}-2\,\frac{4}{3}=0 \qquad y_3^*=-2+\frac{4}{3}+2\,\frac{4}{3}=2$$
$$y_2^*=4-2\,\frac{4}{3}-\frac{4}{3}=0 \qquad y_4^*=-2+2\,\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=2$$

$$\begin{cases}(u_1^*+2u_2^*+u_3^*+2u_4^*-1)\cdot\frac{4}{3}=0\\(2u_1^*+u_2^*+2u_3^*+u_4^*-1)\,\frac{4}{3}=0\\u_1^*\cdot 0=0 \quad \text{indeterminato}\\u_2^*\cdot 0=0 \quad \text{indeterminato}\\u_3^*\cdot 2=0 \Leftrightarrow u_3^*=0\\u_4^*\cdot 2=0 \Leftrightarrow u_4^*=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{4}{3}u_1^*+\frac{8}{3}u_2^*-\frac{4}{3}=0\\\frac{8}{3}u_1^*+\frac{4}{3}u_2^*-\frac{4}{3}=0\\u_3^*=0\\u_4^*=0\end{cases} \begin{cases}u_1^*=-2u_2^*+1\\-4u_2^*+2+u_2^*-1=0\\u_3^*=0\\u_4^*=0\end{cases} \begin{cases}u_1^*=1/3\\u_2^*=1/3\\u_3^*=0\\u_4^*=0\end{cases}$$

Come mi aspettavo, il valore dell'obiettivo nella soluzione ottima del duale è uguale al valore ottimo del primale.

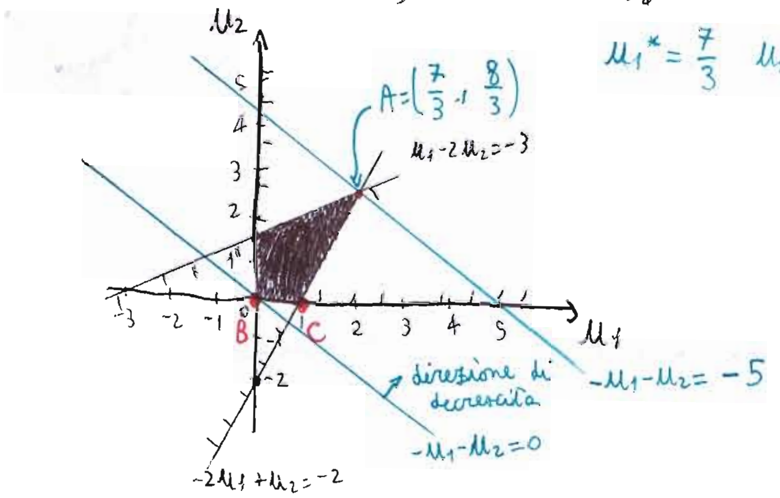
II

$$\max \ -3x_1 - 2x_2$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \quad \Leftrightarrow u_1$$
$$-2x_1 + x_2 + x_4 = -1 \quad \Leftrightarrow u_2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Il duale è $\min \ -u_1 - u_2$

$$u_1 - 2u_2 \geq -3 \quad \Leftrightarrow x_1$$
$$-2u_1 + u_2 \geq -2 \quad \Leftrightarrow x_2$$
$$u_1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow x_3$$
$$u_2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow x_4$$



$u_1^* = \frac{7}{3} \quad u_2^* = \frac{8}{3}$

Condizioni di complementarietà:

$$(u^* A - c)\, x^* = 0$$

$$\begin{cases} (u_1^* - 2u_2^* + 3)\, x_1^* = 0 \\ (-2u_1^* + u_2^* + 2)\, x_2^* = 0 \\ u_1^* x_3^* = 0 \\ u_2^* x_4^* = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{7}{3} - \frac{16}{3} + 3\right) x_1^* = 0 \\ \left(-\frac{14}{3} + \frac{8}{3} + 2\right) x_2^* = 0 \\ x_3^* = 0 \\ x_4^* = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0\, x_1^* = 0 \\ 0\, x_2^* = 0 \\ x_3^* = 0 \\ x_4^* = 0 \end{cases}$$

Il valore ottimo dell'obiettivo è -5, quindi

$$-3x_1^* - 2x_2^* = -5$$

$$\Rightarrow x_1^* = 1, \quad x_2^* = 1, \quad x_3^* = 0, \quad x_4^* = 0$$

Risolvo ora il simplesso duale del primale.

$B_0 = \{x_3, x_4\}$

$$\max \ -3x_1 - 2x_2$$
$$x_3 = -1 - x_1 + 2x_2$$
$$x_4 = -1 + 2x_1 - x_2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- NO ottimalità ($\beta_i < 0$)
- No illimitatezza (in nessun vincolo ho tutti "$-$")
- esce dalla base x_3 (β_i minimo, indice piccolo)
- entra in base x_2 (unico con $\alpha \geq 0$)

Mi trovo nel punto B in cui il duale ha obiettivo $= 0$

$B_1 = \{x_2, x_4\}$

$$\max \ -1 - 4x_1 - x_3$$
$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3$$
$$x_4 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Mi trovo in C

- No ottimalità ($\beta_4 < 0$)
- no illimitatezza
- esce di base x_4
- entra in base x_1

$B_2 = \{x_2, x_1\}$

$$\max \ -5 - \frac{7}{3}x_3 - \frac{8}{3}x_4$$
$$x_2 = 1 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$$
$$x_1 = 1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Mi trovo in A.

SI ottimalità!!
Soluzione ottima
$x_1^* = 1 \quad x_2^* = 1$
$x_3^* = 0 \quad x_4^* = 0$
obiettivo $= -5$

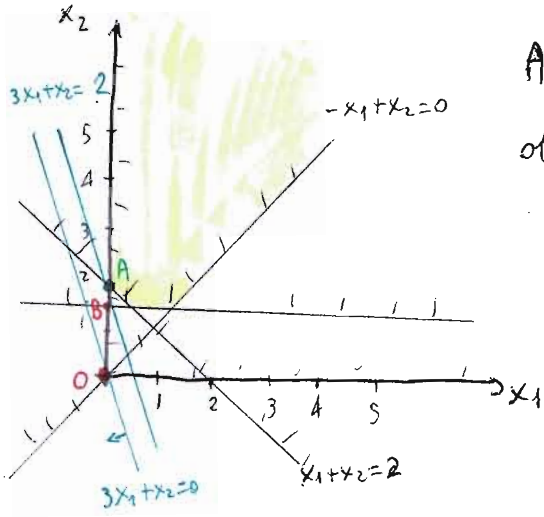
III $\min\ 3x_1 + x_2$

$x_1 + x_2 \geq 2$

$-x_1 + x_2 \geq 0$

$2x_2 \geq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$



$A(0,2)$ $x_1^* = 0$

ob. $= 2$ $x_2^* = 2$

Forma standard:

$-\max\ -3x_1 - x_2$

$x_1 + x_2 - y_1 = 2 \iff u_1$

$-x_1 + x_2 - y_2 = 0 \iff u_2$

$2x_2 - y_3 = 3 \iff u_3$

$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

$B_0 = \{y_1, y_2, y_3\}$ base ammissibile per il duale

$-\max\ -3x_1 - x_2$

$y_1 = -2 + x_1 + x_2$

$y_2 = -x_1 + x_2$

$y_3 = -3 + 2x_2$

$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

- NO ottimalità ($\beta_i < 0$)
- NO illimitatezza
- esce dalla base y_3 (β_3 minimo)
- entra in base x_2 ($\alpha > 0$)
- sono nel punto $O(0,0)$

$B_1 = \{y_1, y_2, x_2\}$

$-\max\ -\frac{3}{2} - 3x_1 - \frac{1}{2}y_3$

$y_1 = -\frac{1}{2} + x_1 + \frac{1}{2}y_3$

$y_2 = \frac{3}{2} - x_1 + \frac{1}{2}y_3$

$x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}y_3$

$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

- NO ottimalità
- NO illimitatezza
- esce dalla base y_1
- entra in base: $x_1 \to -\frac{-3}{1} = 3$ entra y_3
- sono nel punto $B(0, \frac{3}{2})$ $y_3 \to -\frac{-1/2}{1/2} = 1 \Leftarrow$

$B_2 = \{y_3, y_2, x_2\}$

$-\max\ -2 - y_1 - 2x_1$

$y_3 = 1 + 2y_1 - 2x_1$

$y_2 = 2 + y_1 - 2x_1$

$x_2 = 2 + y_1 - x_1$

$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

- SI ottimalità!

sol. ottima: $x_1^* = 0$ $y_1^* = 0$

$x_2^* = 2$ $y_2^* = 2$

$y_3^* = 1$

valore obiettivo $= -(-2) = 2$

Sono nel punto $A(0, 2)$

Il duale in forma standard è:

$$- \min \; 2u_1 + 3u_3$$

$$u_1 - u_2 \geq -3$$

$$u_1 + u_2 + 2u_3 \geq -1$$

$$-u_1 \geq 0$$

$$-u_2 \geq 0$$

$$-u_3 \geq 0$$

La condizione di complementarietà è

$$(u^* A - c) x^* = 0$$

$$\begin{cases} (u_1^* - u_2^* + 3)\, x_1^* = 0 \\ (u_1^* + u_2^* + 2u_3^* + 1)\, x_2^* = 0 \\ -u_1^* y_1^* = 0 \\ -u_2^* y_2^* = 0 \\ -u_3^* y_3^* = 0 \end{cases}$$

ma $x_1^* = 0$, $x_2^* = 2$, $y_1^* = 0$, $y_2^* = 2$, $y_3^* = 1$

$$\begin{cases} u_1^* 0 = 0 \\ 2(u_1^* + 1) = 0 \\ 0 u_1^* = 0 \\ u_2^* = 0 \\ u_3^* = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1^* = -1 \\ u_2^* = 0 \\ u_3^* = 0 \end{cases}$$

Soluzione ottima del duale

Esercizio I

Si consideri il seguente problema di PLI:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 5x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -6x_1 + 4x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in Z \end{aligned}$$

Risolvere il problema di PLI con l'algoritmo branch-and-bound risolvendo i vari sottoproblemi attraverso il metodo di risoluzione per via grafica. Si faccia lo stesso dopo aver trasformato il problema in forma standard e risolvendo i vari sottoproblemi con l'algoritmo del simplesso più opportuno (visti i calcoli pesanti può anche bastare il calcolo dei bound sul nodo radice e sui suoi due nodi figli).

Si generi anche il primo taglio di Gomory per questo problema e lo si visualizzi graficamente.

Esercizio II

Sia dato il seguente problema di PLI:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_2 - x_1 \\ & x_1 + x_2 \leq \tfrac{7}{2} \\ & -x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \qquad x_1, x_2 \in Z \end{aligned}$$

Lo si risolva per via grafica. Dopo averlo trasformato in forma standard (*con le dovute cautele trattandosi di un problema di PLI*), lo si risolva con l'algoritmo branch-and-bound. Lo si risolva anche con l'algoritmo di taglio di Gomory, visualizzando i tagli introdotti.

Esercizio III

Si consideri il seguente problema di PLI:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 + 6x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in Z \end{aligned}$$

Dopo averlo risolto graficamente, lo si trasformi in forma standard e lo si risolva usando l'algoritmo di taglio di Gomory, visualizzando a ogni iterazione il taglio introdotto.

ESERCITAZIONE PLI

I

$\max \; x_1 + 5x_2$

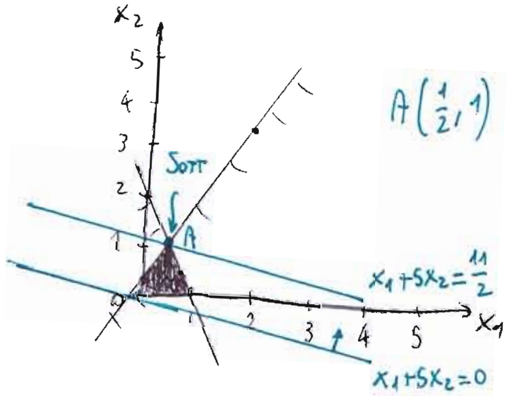
$2x_1 + x_2 \le 2$

$-6x_1 + 4x_2 \le 1$

$x_1, x_2 \ge 0$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

Risolvo il rilassamento lineare per via grafica



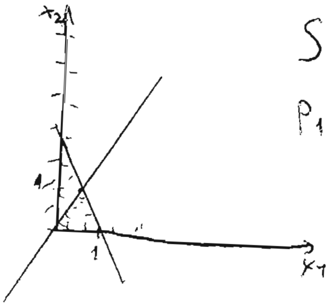
$LB = \cancel{0}\; 1$

$U(P_0) = \frac{11}{2}$

$x_1 \le 0$ | $x_1 \ge 1$

$U(P_2) = 1$

P_1: $x_1 \le 0$

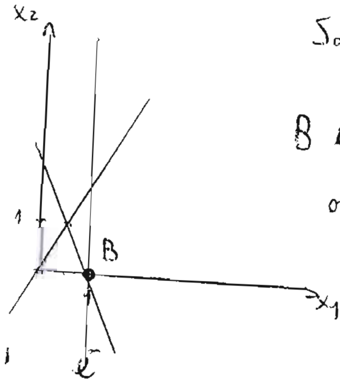


$S = \phi$

$P_1 = \phi$.

Cancello P_1

P_2: $X \ge 1$



$S_{a_{P_2}} = \{B\}$ $\quad B(1, 0)$

$B \in Z_{OTT}$

obiettivo $= U(P_2) = 1$

La soluzione ottima del problema di PLI è

$x_1^* = 1$

$x_2^* = 0$

con valore ottimo pari a 1.

Forma standard:

$\max \; x_1 + 5x_2$

$2x_1 + x_2 + y_1 = 2$

$-6x_1 + 4x_2 + y_2 = 1$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \ge 0$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$

Ril. lineare:

$B_0 = \{y_1, y_2\}$ $\rightarrow B_1\{y_1, x_2\}$ $\rightarrow B_2\{x_1, x_2\}$

B_0:

$\max \; x_1 + 5x_2$

$y_1 = 2 - 2x_1 - x_2$

$y_2 = 1 + 6x_1 - 4x_2$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \ge 0$

$x_1 = 0 \quad y_1 = 2$ obiettivo

$x_2 = 0 \quad y_2 = 1 \quad 0$

(origine)

ammissibile anche

per Z_a

$LB = 0$

B_1:

$\max \; \frac{5}{4} + \frac{17}{2}x_1 - \frac{5}{4}y_2$

$y_1 = \frac{7}{4} - \frac{7}{2}x_1 + \frac{1}{4}y_2$

$x_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{4}y_2$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \ge 0$

$U(S) = \frac{5}{4}$

B_2:

$\max \; \frac{11}{2} + \ldots$

$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}y_2 - \frac{2}{7}y_1$

$x_2 = 1 + 5y_2 - \frac{3}{7}y_1$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \ge 0$

$U(S) = \frac{11}{2}$

PROVA INTERMEDIA RICERCA OPERATIVA

ESERCIZIO 1. (6 punti) Sia data la seguente riformulazione rispetto alla base $B = \{x_3, x_4\}$ di un problema di PL:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2 + 2x_1 + x_2 - 3x_5 \\ & x_3 = 5 - 2x_1 + x_2 + x_5 \\ & x_4 = 3 - x_1 - 2x_2 - x_5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

- Si spieghi qual è il significato dei coefficienti delle variabili x_1, x_2 e x_5 nell'obiettivo della riformulazione;
- sulla base di tale spiegazione si dica quali variabili potrebbero entrare in base se si vuole incrementare il valore dell'obiettivo;
- seguendo le indicazioni del simplesso primale, si stabilisca quale variabile entrerà in base e quale dovrà uscire dalla base, motivando entrambe le scelte;
- a quale conclusione giungeremmo se cambiassimo segno al coefficiente di x_2 nell'equazione relativa a x_4?

ESERCIZIO 2. (6 punti) Durante l'esecuzione dell'algoritmo branch-and-bound, il lower bound attuale è $LB = 4$ e il rilassamento lineare di un sottoproblema P ha la seguente riformulazione rispetto alla base ottima:

$$\begin{aligned} \max \quad & \tfrac{43}{8} - \tfrac{1}{2}x_3 - x_4 \\ & x_1 = \tfrac{7}{4} - x_3 - x_4 \\ & x_2 = 3 - 2x_4 \\ & x_5 = \tfrac{3}{2} - 2x_3 - x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Si esegua l'operazione di branching sul sottinsieme P determinando un upper bound per i suoi due nodi figli e aggiornando, eventualmente, il lower bound LB

ESERCIZIO 3. (5 punti) Si consideri il seguente problema di PLI:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ & x_1 - x_2 = 3 \\ & x_1 - x_3 = 5 \\ & x_1 - x_4 = 4 \\ & x_2 - x_4 = 3 \\ & x_3 - x_5 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in Z \end{aligned}$$

Senza risolvere il suo rilassamento lineare, si spieghi perché questo ha certamente soluzione ottima che è anche soluzione ottima del problema di PLI.

ESERCIZIO 4. (4 punti) Si dimostri che la regione ammissibile di un problema di PL in forma canonica è un insieme convesso.

ESERCIZIO 5. (4 punti) Si descrivano tutte le possibili relazioni tra le soluzioni di un problema primale e del relativo duale.

ESERCIZIO 6. (6 punti) Data l'equazione generatrice del taglio (con β_k non intero):

$$x_{i_k} = \beta_k + \alpha_{k1} x_{i_{m+1}} + \alpha_{k2} x_{i_{m+2}} + \cdots + \alpha_{k,n-m} x_{i_n}.$$

il taglio di Gomory è definito come segue:

$$-f_k + f_{k1} x_{i_{m+1}} + f_{k2} x_{i_{m+2}} + \cdots + f_{k,n-m} x_{i_n} \geq 0$$

dove f_{kj} è la mantissa di $-\alpha_{kj}$, $j = 1, \ldots, n-m$, mentre f_k è la mantissa di β_k. Si dimostri che il taglio di Gomory è un taglio valido.

PROVA INTERMEDIA

① $\max \; 2 + 2x_1 + x_2 - 3x_5$ $\quad B = \{x_3, x_4\}$

$x_3 = 5 - 2x_1 + x_2 + x_5$

$x_4 = 3 - x_1 - 2x_2 - x_5$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

- I coefficienti di x_1 (2), x_2 (1) e x_5 (-3) nell'obiettivo, detti coefficienti di costo ridotto, indicano come un aumento di un'unità di una variabile influenzi il valore dell'obiettivo. Se aumento x_1 di 1 e annullo x_2 e x_5, infatti, l'obiettivo vale $2 + 2 \cdot 1 = 4$.
- Le variabili che potrebbero entrare in base sono x_1 e x_2 perchè hanno coefficiente positivo.
- Entra in base x_1 in quanto ha coefficiente di costo ridotto più grande e, quindi, incrementa maggiormente l'obiettivo. Esce la variabile x_3 perchè è la prima ad annullarsi se aumentiamo il valore di x_1. La nuova base sarà pertanto $B_1 = \{x_1, x_4\}$
- Se x_2 avesse coefficiente positivo nell'equazione di x_4, sarebbe verificata la condizione di illimitatezza, pertanto potremmo dire $S_{OTT} = \emptyset$.

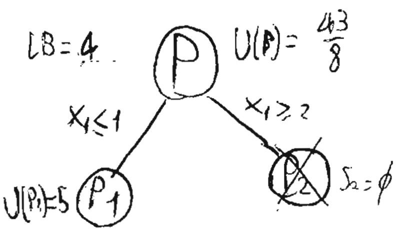
② $\max \; \frac{43}{8} - \frac{1}{2}x_3 - x_4$

$x_1 = \frac{7}{4} - x_3 - x_4$

$x_2 = 3 - 2x_4$

$x_5 = \frac{3}{2} - 2x_3 - x_4$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$



$x_1 = \frac{7}{4}$ $\quad x_3 = 0$ $\quad x_5 = \frac{3}{2}$

$x_2 = 3$ $\quad x_4 = 0$

$\boxed{P_1}$ $\max \; \frac{43}{8} - \frac{1}{2}x_3 - x_4$

$x_1 = \frac{7}{4} - x_3 - x_4$

$x_2 = 3 - 2x_4$

$x_5 = \frac{3}{2} - 2x_3 - x_4$

$y_1 = -\frac{3}{4} + x_3 + x_4$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1 \geq 0$

$B_0 = \{x_1, x_2, x_5, y_1\}$

Simplesso duale $\longrightarrow$

$B_1' = \{x_1, x_2, x_5, x_3\}$

$\max \; 5 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}y_1$

$x_1 = 1 - y_1$

$x_2 = 3 - 2x_4$

$x_5 = 0 + x_4 - 2y_1$

$x_3 = \frac{3}{4} - x_4 + y_1$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1 \geq 0$

$x_1^* = 1$ $\quad x_4^* = 0$

$x_2^* = 3$ $\quad x_5^* = 0$

$x_3^* = 3/4$ $\quad y_1^* = 0$

obiettivo $= 5$

$\boxed{P_2}$ $\max \frac{43}{8} - \frac{1}{2}x_3 - x_4$

$x_1 = \frac{7}{4} - x_3 - x_4$

$x_2 = 3 - 2x_4$

$x_5 = \frac{3}{2} - 2x_3 - x_4$

$y_1 = -\frac{1}{4} - x_3 - x_4$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1 \geq 0$

$B_0'' = \{x_1, x_2, x_5, y_1\}$

Simplesso duale $\Longrightarrow$ In y_1 è verificata la condizione di illimitatezza

$\Longrightarrow S_a(P_2) = \phi$.

④ Un problema di PL in forma canonica è

$\max cx$

$Ax \leq b$

$x \geq 0$

La regione ammissibile è $S_a = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$.

Siano $x_1, x_2 \in S_a$. S_a è convesso se $\forall \lambda \in (0,1)$, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S_a$ (cioè $a_i(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq b_i$):

$$a_i(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \underbrace{\lambda}_{\geq 0}\underbrace{a_i x_1}_{\leq b_i} + \underbrace{(1-\lambda)}_{\geq 0}\underbrace{a_i x_2}_{\leq b_i} \leq \lambda b_i + (1-\lambda)b_i = b_i \quad \square$$

⑤ Vista la simmetria tra primale e duale, le proprietà che valgono in un verso valgono anche nell'altro.

- Se un problema ha $S_a = \phi$, l'altro ha obiettivo illimitato oppure $D_a = \phi$
- Se un problema ha $S_{OTT} = \phi$, l'altro ha $D_a = \phi$
- Se $S_{OTT} \neq \phi$, $D_{OTT} \neq \phi$ e i valori ottimi coincidono
- Se $x_0 \in S_a$ e $u_0 \in D_a$, $cx_0 \leq u_0 b$
- Se $x^* \in S_a$ e $u^* \in D_a$ e $cx^* = u^* b$, allora $x^* \in S_{OTT}$ e $u^* \in D_{OTT}$
- Se un problema ha obiettivo illimitato, l'altro ha regione ammissibile vuota

⑤ Affinché un taglio sia valido deve essere che la "nuova" regione ammissibile non comprenda la soluzione ottima del rilassamento lineare ma contenga tutta Z_a.
Vedo il taglio come $y_1 = -f_k + f_{k1}x_{i_{m+1}} + \ldots + f_{k,n-m}x_{i_n}$, $y_1 \geq 0$. In corrispondenza di x^*, le variabili fuori base si annullano e rimane $y_1 = -f_k$, ma $f_k > 0$ per definizione di mantissa e questo va in contraddizione con $y_1 \geq 0$.
Ora devo dimostrare $y_1 \geq 0$ e intera.